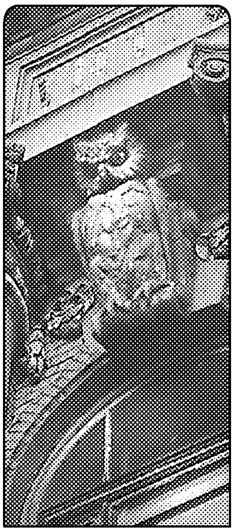

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ГЕОЛОГИЯ

УДК 550.8.011

НОВЫЙ ПОДХОД К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕД

П. Н. Александров

Александров Павел Николаевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Центр геоэлектромагнитных исследований Института физики Земли имени О. Ю. Шмидта РАН, Москва, alexandr@igemi.troitsk.ru

Предложен новый подход к обоснованию лучевой сейсмики, основанный на фиксации амплитуды вектора смещений и сведении уравнений теории упругости к системе неявно заданных функций. Это позволяет определить функциональную зависимость между временем прихода волны и пространственными координатами. В результате получена система векторных уравнений. Собственные значения матрицы, входящие в эту систему, являются уравнениями эйконала. Показано, что для произвольно анизотропной и неоднородной упругой среды максимальное количество уравнений эйконала равно трем.
Ключевые слова: уравнение эйконала, неоднородные упругие среды, анизотропия упругих параметров.

A New Approach to the Derivation of Eikonal for Inhomogeneous Anisotropic Elastic Media

P. N. Aleksandrov

Pavel N. Aleksandrov, ORCID 0000-0002-8454-4552, Center Geoelectromagnetic studies at the Institute of physics of the earth Schmidt of the Russian Academy of Sciences, 10, Bolshaya Gruzinskaya Str., Moscow, 123242, Russia, alexandr@igemi.troitsk.ru

The proposed new approach to seismic radiation, is based on fixing the amplitude of the displacement vector, reduce them to a system of implicit functions. This allows you to find the functional dependence between the time of arrival of the waves and spatial coordinates. The system of vector equations. The eigenvalues of the matrix in the system are the equations of eikonal. It is shown that for arbitrarily anisotropic and heterogeneous elastic medium, the maximum number of equations eikonal equal to three.
Key words: equation eikonal, inhomogeneous elastic medium, elastic anisotropy parameters.

DOI: 10.18500/1819-7663-2018-18-3-178-183

Лучевой метод сейсморазведки основан на решении уравнения эйконала. Развитие теории сейсморазведки требует получения уравнения эйконала для анизотропных сред. Уравнение эйконала, как правило, получают путем разложения в ряды вектора смещения в частотной области [1] или использования свойств решения уравнений Ламе для частных случаев анизотропии [2]. Известны методы получения уравнения эйконала, основанные на методе характеристик, используемом для анализа дифференциальных уравнений в частных производных и приведения их к каноническому виду [3].

Основной целью настоящего исследования является вывод уравнения эйконала для неоднородных произвольно анизотропных сред. Под произвольно анизотропной средой понимается полный тензор упругих параметров в законе Гука, отличающийся от тензора упругих параметров в изотропной среде. При этом под анизотропией будем понимать анизотропию, связанную с внутренним строением горной породы, так называемую «макроанизотропию» [4]. В связи с этим никаких ограничений на симметричность матрицы упругих параметров накладываться не будет.

В простейшем случае однородной изотропной среды уравнение эйконала имеет вид [5]

$$(\operatorname{grad} t)^2 = \frac{1}{V^2},$$

где $t = t(x, y, z)$ – время прихода волны в точку наблюдения; x, y, z – пространственные координаты точки наблюдения в декартовой системе координат; V – скорость (продольная иди поперечная) распространения волны в изотропной упругой среде.

1. Исходные уравнения теории упругости (уравнения Ламе) [6].

Уравнения теории упругости в векторном виде включают трехкомпонентный вектор смещения $\mathbf{S} = \mathbf{i}S_x + \mathbf{j}S_y + \mathbf{k}S_z$, где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты декартовой системы координат, S_x, S_y, S_z – проекции вектора смещения на оси координат; девятикомпонентный вектор напряжений $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_y \\ \mathbf{P}_z \end{pmatrix}$, где $\mathbf{P}_x$, $\mathbf{P}_y$, $\mathbf{P}_z$ – трехкомпонентные векторы упругих напряжений, возникающих в среде под действием силы, направленной соответственно по осям x, y, z; девятикомпонентный вектор деформаций $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} S_x \\ \operatorname{grad} S_y \\ \operatorname{grad} S_z \end{pmatrix}$.

В настоящей статье вектор понимается как вектор-столбец.

Взаимосвязи между упругими полями устанавливаются с помощью следующих уравнений:

– закон Гука $\mathbf{P} = H\mathbf{e}$, где H – матрица упругих параметров размерности 9x9 элементов;

– уравнения равновесия

$$\operatorname{div} \mathbf{P}_x - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} S_x = -F_x,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{P}_y - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} S_y = -F_y,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{P}_z - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} S_z = -F_z,$$

где ρ – удельная плотность; $\mathbf{F} = \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z$ – вектор внешних массовых сил.

Упругие параметры среды и плотность являются функциями пространственных координат: $H = H(x, y, z)$, $\rho = \rho(x, y, z)$.

2. Рассмотрим вывод уравнения эйконала для анизотропных неоднородных сред непосредственно исходя из уравнений Ламе. Введем вектор скорости смещения $\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S} = \mathbf{i}V_x + \mathbf{j}V_y + \mathbf{k}V_z$.

Тогда систему уравнений Ламе и закон Гука можно переписать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{P}_x - \rho \frac{\partial}{\partial t} V_x = -F_x,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{P}_y - \rho \frac{\partial}{\partial t} V_y = -F_y,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{P}_z - \rho \frac{\partial}{\partial t} V_z = -F_z,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P} = H \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e} = H \begin{pmatrix} \operatorname{grad} V_x \\ \operatorname{grad} V_y \\ \operatorname{grad} V_z \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем амплитуду компонент вектора-функции скорости смещений, т. е. положим $V_x = C_1$, $V_y = C_2$, $V_z = C_3$, где C_1, C_2, C_3 – некоторые константы. Аналогично зафиксируем амплитуду вектора-функции напряжений $\mathbf{P}(x, y, z, t)$. Будем предполагать, что существуют такие числа, которым можно приравнять компоненты указанных векторов $\mathbf{V}$ и $\mathbf{P}$. В результате получим систему уравнений, состоящих из трех уравнений неявно заданных функций [7] пространственных координат и времени вектора смещений, а также девяти уравнений неявно заданных функций вектора напряжений. Такая система уравнений позволяет установить зависимость времени прихода упругого поля от пространственных координат в виде множества неявных функций $t = t(x, y, z)$, определяющих моменты прихода волны в точку наблюдения.

3.Получим уравнения, которым удовлетворяют функции $t = t(x, y, z)$, которые являются искомыми в настоящей работе.

Введем новую векторную функцию скорости смещения $\tilde{\mathbf{V}}(x,y,z) = \mathbf{V}(x,y,z,t(x,y,z))$ и векторную функцию напряжений $\tilde{\mathbf{P}}(x,y,z) = \mathbf{P}(x,y,z,t(x,y,z))$. В этом случае любая производная от вектора скорости смещений и вектора напряжений будет равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{V}}(x,y,z) = 0,\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{P}}_x = 0,\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{P}}_y = 0,\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{P}}_z = 0.$$

Следуя правилу дифференцирования сложных функций, получим

$$\begin{pmatrix} \operatorname{grad} \tilde{V}_x \\ \operatorname{grad} \tilde{V}_y \\ \operatorname{grad} \tilde{V}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} V_x \\ \operatorname{grad} V_y \\ \operatorname{grad} V_z \end{pmatrix}\Bigg|_{t=t(x,y,z)} +$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}V_x\Big|_{t=t(x,y,z)}\operatorname{grad} t \\ \frac{\partial}{\partial t}V_y\Big|_{t=t(x,y,z)}\operatorname{grad} t \\ \frac{\partial}{\partial t}V_z\Big|_{t=t(x,y,z)}\operatorname{grad} t \end{pmatrix} =$$

$$= H^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\Big|_{t=t(x,y,z)} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}V_x\Big|_{t=t(x,y,z)}\operatorname{grad} t \\ \frac{\partial}{\partial t}V_y\Big|_{t=t(x,y,z)}\operatorname{grad} t \\ \frac{\partial}{\partial t}V_z\Big|_{t=t(x,y,z)}\operatorname{grad} t \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\Big|_{t=t(x,y,z)} + H\mathbf{D} = 0,$$

где $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}V_x\Big|_{t=t(x,y,z)}\operatorname{grad} t \\ \frac{\partial}{\partial t}V_y\Big|_{t=t(x,y,z)}\operatorname{grad} t \\ \frac{\partial}{\partial t}V_z\Big|_{t=t(x,y,z)}\operatorname{grad} t \end{pmatrix}$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_x\Big|_{t=t(x,y,z)} = -H_x\mathbf{D},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_y\Big|_{t=t(x,y,z)} = -H_y\mathbf{D}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_z\Big|_{t=t(x,y,z)} = -H_z\mathbf{D},\quad H = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix},$$

где H_x, H_y, H_z – подматрицы матрицы H размерностью 3x9.

Аналогично получим для уравнения равновесия

$$\begin{pmatrix} \operatorname{div}\tilde{\mathbf{P}}_x \\ \operatorname{div}\tilde{\mathbf{P}}_y \\ \operatorname{div}\tilde{\mathbf{P}}_z \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} \operatorname{div}\mathbf{P}_x \\ \operatorname{div}\mathbf{P}_y \\ \operatorname{div}\mathbf{P}_z \end{pmatrix}\Bigg|_{t=t(x,y,z)} +$$

$$+\begin{pmatrix} (\operatorname{grad} t)^T\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_x\Big|_{t=t(x,y,z)} \\ (\operatorname{grad} t)^T\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_y\Big|_{t=t(x,y,z)} \\ (\operatorname{grad} t)^T\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_y\Big|_{t=t(x,y,z)} \end{pmatrix} =$$

$$= \rho\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}\Big|_{t=t(x,y,z)} - \mathbf{F}\Big|_{t=t(x,y,z)} +$$

$$+\begin{pmatrix} (\operatorname{grad} t)^T\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_x\Big|_{t=t(x,y,z)} \\ (\operatorname{grad} t)^T\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_y\Big|_{t=t(x,y,z)} \\ (\operatorname{grad} t)^T\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_y\Big|_{t=t(x,y,z)} \end{pmatrix},$$

где значок « ^{T} » означает операцию транспонирования.

В развернутом виде последнее уравнение с учетом (1) примет вид

$$\begin{pmatrix} (\operatorname{grad} t)^T\cdot H_x \\ (\operatorname{grad} t)^T\cdot H_y \\ (\operatorname{grad} t)^T\cdot H_z \end{pmatrix} K\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}\Big|_{t=t(x,y,z)} - \rho\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}\Big|_{t=t(x,y,z)} =$$

$$=\left(\begin{pmatrix} (\operatorname{grad} t)^T\cdot H_x \\ (\operatorname{grad} t)^T\cdot H_y \\ (\operatorname{grad} t)^T\cdot H_z \end{pmatrix} K - \rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}\Big|_{t=t(x,y,z)} =$$

$$= -\mathbf{F}\Big|_{t=t(x,y,z)},$$

где

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial z} \end{pmatrix}^T.$$

Таким образом, получена система уравнений вида

$$A\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}\Big|_{t=t(x,y,z)} = -\mathbf{F}\Big|_{t=t(x,y,z)}, \qquad (2)$$

где матрица A имеет вид

$$A = \left[\begin{pmatrix} \operatorname{grad} t & [0] & [0] \\ [0] & \operatorname{grad} t & [0] \\ [0] & [0] & \operatorname{grad} t \end{pmatrix}^T \right.$$

$$\left. H\begin{pmatrix} \operatorname{grad} t & [0] & [0] \\ [0] & \operatorname{grad} t & [0] \\ [0] & [0] & \operatorname{grad} t \end{pmatrix} - \rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Символом [0] обозначены нулевые вектор-столбцы размерностью 3x1.

Из условия действительности собственных значений следует, что матрица должна удовлетворять равенству $AA^T = A^TA$ или $A = A^T$, из чего следует, что матрица упругих параметров должна быть симметричной $H = H^T$. В противном случае собственные значения матрицы могут быть комплексными. Этот случай здесь рассматриваться не будет, поскольку требует дополнительных исследований.

Отметим, что матрица упругих параметров H и плотность ρ сохраняют зависимость от пространственных координат: $H = H(x, y, z)$, $\rho = \rho(x, y, z)$.

Вне источников система уравнений (2) становится однородной, из чего следует, что собственные значения матрицы A (предполагая ее диагонализируемой [8]) должны быть равны нулю. Эти собственные значения и являются искомыми тремя уравнениями эйконала – три годографа, описывающие распространение волнового поля в анизотропной неоднородной среде. Эти уравнения являются собственными значениями матрицы A:

$$[L] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix}$$

и, как следствие, удовлетворяют в произвольно анизотропной неоднородной среде кубическому алгебраическому уравнению в соответствии с размерностью этой матрицы.

Из условия равенства нулю собственных значений матрицы A следует, что определитель этой матрицы также будет равен нулю $\det(A) = 0$. Это и является общим уравнением эйконала для произвольно анизотропной неоднородной среды. В общем случае результатом решения является три независимых функции годографа в виде произведения $L_1 L_2 L_3 = 0$ собственных значений матрицы A. В соответствие с этим общее уравнение эйконала распадается на три уравнения. Для нахождения конкретных выражений для уравнений эйконала положим

$$L_1 = (\operatorname{grad} t)^T V_1 \operatorname{grad} t - \rho,$$

$$L_2 = (\operatorname{grad} t)^T V_2 \operatorname{grad} t - \rho,$$

$$L_3 = (\operatorname{grad} t)^T V_3 \operatorname{grad} t - \rho,$$

где V_1, V_2, V_3 – некоторые произвольные матрицы-функции пространственных координат, получающиеся из матрицы A. Тогда, приравнивая определитель матрицы A и произведение собственных значений, получим

$$\det(A) = L_1 L_2 L_3 = ((\operatorname{grad} t)^T V_1 \operatorname{grad} t - \rho)$$
$$((\operatorname{grad} t)^T V_2 \operatorname{grad} t - \rho)((\operatorname{grad} t)^T V_3 \operatorname{grad} t - \rho) = 0$$

или

$$\det(A) - ((\operatorname{grad} t)^T V_1 \operatorname{grad} t - \rho)$$
$$((\operatorname{grad} t)^T V_2 \operatorname{grad} t - \rho)((\operatorname{grad} t)^T V_3 \operatorname{grad} t - \rho) = 0 .$$

Приравнивая нулю величины при одинаковых степенях производных по пространственным координатам от времени, найдем матрицы V_1, V_2, V_3 в зависимости от упругих параметров, заданных матрицей H. Общее количество неизвестных равно 27, в то время как матрица упругих параметров включает 9x9=81 элемент. Это означает, что не все упругие параметры, точнее их комбинации, будут определять скорость распространения волн в анизотропной неоднородной среде. Отсюда следует вывод, что существует такая комбинация упругих параметров, которая не влияет на скорость распространения, а изменяет только форму импульса.

В области источников определитель матрицы A не будет равен нулю. Тогда, воспользовавшись представлением $A = v[L]v^{-1}$, где v – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A, получим

$$A\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}\Big|_{t=t(x,y,z)} = v[L]v^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}\Big|_{t=t(x,y,z)} = -\mathbf{F}\Big|_{t=t(x,y,z)}$$

или

$$[L]v^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}\Big|_{t=t(x,y,z)} = -v^{-1}\mathbf{F}\Big|_{t=t(x,y,z)} .$$

Учитывая диагональность матрицы собственных значений $[L]$, из последнего уравнения получим неоднородное уравнение эйконала в терминах собственных значений матрицы A. Вне источников система становиться однородной $[L]v^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}\Big|_{t=t(x,y,z)} = 0$, откуда следует, что в силу произвольности $\mathbf{F}\Big|_{t=t(x,y,z)}$ и заданной матрицы A все собственные значения должны быть равны нулю.

Условие $t = t(x, y, z)$ для вектора смещения приводит к выводу, что градиент времени можно рассматривать как выражение импедансного типа, получаемое дифференцированием неявной функции:

$$\operatorname{grad} t = \mathbf{i}\frac{\partial t}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial t}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial t}{\partial z} = -\mathbf{i}\frac{\dfrac{\partial V_v}{\partial x}}{\dfrac{\partial V_v}{\partial t}} - \mathbf{j}\frac{\dfrac{\partial V_v}{\partial y}}{\dfrac{\partial V_v}{\partial t}} - \mathbf{k}\frac{\dfrac{\partial V_v}{\partial z}}{\dfrac{\partial V_v}{\partial t}},$$

$$v = \{x, y, z\} .$$

В случае разрыва упругих параметров данное представление позволяет установить граничные условия для годографа $t = t(x, y, z)$ и получить конструктивный алгоритм вычисления градиента времени по экспериментальным данным.

4. Рассмотрим частный случай. Для неоднородной изотропной среды матрица упругих параметров имеет вид

$$H = H(x,y,z) = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda+2\mu \end{pmatrix},$$

где $\lambda = \lambda(x,y,z)$, $\mu = \mu(x,y,z)$ – параметры Ламе.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)(\frac{\partial t}{\partial x})^2 + \mu(\frac{\partial t}{\partial y})^2 + \mu(\frac{\partial t}{\partial z})^2 - \rho & (\lambda+\mu)\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial y} & (\lambda+\mu)\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial z} \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial y} & \mu(\frac{\partial t}{\partial x})^2 + (\lambda+2\mu)(\frac{\partial t}{\partial y})^2 + \mu(\frac{\partial t}{\partial z})^2 - \rho & (\lambda+\mu)\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial z} \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial z} & (\lambda+\mu)\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial z} & \mu(\frac{\partial t}{\partial x})^2 + \mu(\frac{\partial t}{\partial y})^2 + (\lambda+2\mu)(\frac{\partial t}{\partial z})^2 - \rho \end{pmatrix}$$

имеет три собственных значения, два из которых равны между собой:

$$L_1 = (\lambda + 2\mu)(\mathrm{grad}\, t)^2 - \rho,$$

$$L_2 = L_3 = \mu(\mathrm{grad}\, t)^2 - \rho,$$

где $\rho = \rho(x,y,z)$.

Вне источников собственные значения должны быть равны нулю, отсюда получаем три отдельных уравнения эйконала для продольных V_p и поперечных V_s волн относительно трех функций годографа, две из которых также равны между собой:

$$(\mathrm{grad}\, t_1)^2 = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{V_p^2}, \quad (\mathrm{grad}\, t_2)^2 = \frac{\rho}{\mu} = \frac{1}{V_s^2},$$

$$(\mathrm{grad}\, t_3)^2 = \frac{\rho}{\mu} = \frac{1}{V_s^2}.$$

Выводы

1. Получена система уравнений эйконала в случае анизотропной неоднородной среды. При этом каких-либо приближений, например коротковолнового, не использовалось.

2. В анизотропной неоднородной среде могут распространяться только три волны в соответствии с количеством уравнений эйконала. Данный вывод совпадает с полученным ранее результатом [9] с использованием другого подхода. В однородной произвольно анизотропной среде каждая волна будет описываться трехосным эллипсоидом, что приводит в общем случае к 9 скоростям распространения упругого поля в разных направлениях.

3. Важным геологическим результатом настоящего исследования является наиболее полное описание распространения упругого поля в лучевом приближении. Это обстоятельство важно для изучения сложнопостроенных и уникальных по своим геолого-геофизическим свойствам горных пород.

Библиографический список

1. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит, 1980. 304 с.

2. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды // Вопр. динамической теории распространения сейсмических волн. 1961. № 5. С. 36–46.

3. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики : в 2 т. М. : Мир, 1964. Т. 2. 831с.

4. *Оболенцева И. Р., Чичинина Т. И.* 50 лет исследований сейсмической анизотропии в России // Геология и геофизика. 2010. Т. 51, № 10. С. 1452–1470.

5. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики : пер. с англ. М. : Наука, 1973. 720 с.

6. *Уайт Дж. Э.* Возбуждение и распространение сейсмических волн. М. : Недра, 1986. 261 с.

7. *Никольский С. М.* Курс математического анализа : в 2 т. 3-е изд. перераб. и доп. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. Т. 1. 464 с.

8. *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. 2-е изд. М. : Наука, 2008. 536 с.

9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики : в 5 т. 6-е изд. М. : Наука, 1981. Т. 4, ч. 2. 551 с.

Образец для цитирования:

Александров П. Н. Новый подход к выводу уравнения эйконала для неоднородных анизотропных упругих сред // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Науки о Земле. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 178–183. DOI: 10.18500/1819-7663-2018-18-3-178-183.

Cite this article as:

Aleksandrov P. N. A New Approach to the Derivation of Eikonal for Inhomogeneous Anisotropic Elastic Media. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Earth Sciences,* 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 178–183 (in Russian). DOI: 10.18500/1819-7663-2018-18-3-178-183.